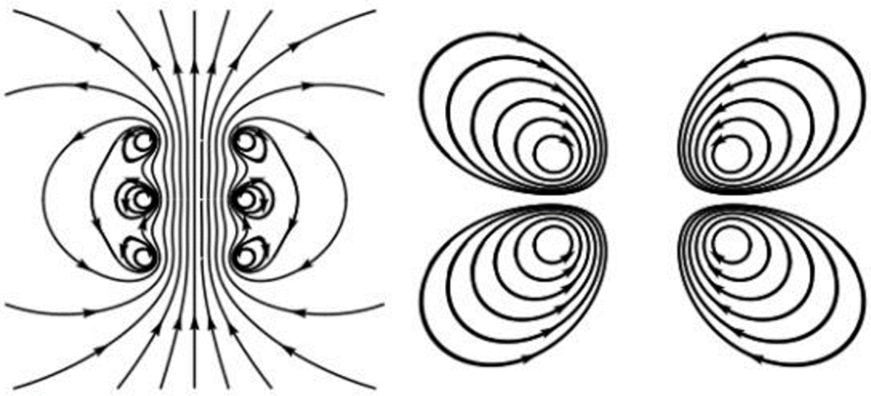
Induction | Chapitre 1 | TD (I1)

Donnée : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H·m^{-1}

Exercice n°1 • Cartes de champ ★☆☆

Dans les cartes de champ magnétique suivantes, où le champ est-il le plus intense ? Où sont placées les sources ? Le courant (d'intensité positive) sort-il ou rentre-t-il du plan de la figure ? Où sont les zones de champ uniforme ?



Exercice n°2 • Champ créé par une bobine longue ★☆☆

On considère une bobine de longueur $\ell = 60$ cm, de rayon $R = 4$ cm, parcourue par un courant d'intensité $I = 0,6$ A.

1) Faire un schéma de la bobine. Choisir un sens de passage du courant et indiquer le sens du champ magnétique à l'intérieur de la bobine.

2) L'hypothèse de bobine longue est-elle valable pour la bobine considérée ?

3) Déterminer le nombre de spires nécessaires pour obtenir un champ magnétique de 1 mT.

On rappelle le champ créé à l'intérieur de la bobine : $B = \mu_0 n I$ avec n la densité linéique de spire (nombre de spire par unité de longueur).

Exercice n°3 • Étude de distributions de courant ★★☆

Dans cet exercice, on cherche à étudier l'expression du champ magnétique créé par des distributions de courant. On note M un point quelconque de l'espace. Toutes les questions sont indépendantes.

1) On considère un cylindre d'axe z, de hauteur infini et de rayon R, parcouru dans un courant uniforme selon l'axe du cylindre (il s'agit donc un fil infini de rayon $R > 0$). Simplifier au maximum l'expression de $\overrightarrow{B}(M)$.

2) On considère deux sphères de même centre O et de rayon a et b (avec : $a < b$), séparées par un matériau conducteur. Il existe un courant radial uniforme dirigé de la sphère intérieure vers la sphère extérieure. Montrer que $\overrightarrow{B}(M) = \overrightarrow{0}$ dans tout l'espace.

3) On considère le plan $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ uniformément parcouru par un courant dans la direction $\overrightarrow{u_x}$. Simplifier au maximum l'expression de $\overrightarrow{B}(M)$, et déterminer le lien entre $B(z)$ et $B(-z)$.

Exercice n°4 • Moment magnétique atomique ★★☆

On considère, dans une représentation de mécanique classique, qu'un électron de valence décrit une orbite circulaire centrée sur le noyau atomique. L'orbite est dans le plan $z = 0$ et le noyau est à l'origine O du repère.

L'électron a une masse m et une charge électrique $q = -e$, l'orbite a pour rayon R et la période de révolution vaut T.

1) En considérant que l'électron définit une boucle de courant circulaire (une spire), déterminer l'intensité I correspondante en fonction de e et T.

2) En déduire le moment dipolaire magnétique μ en fonction de e, T et R.

3) Exprimer le moment cinétique L_z de l'électron associé à son mouvement orbital autour du noyau par rapport à l'axe de rotation, en fonction de m, R et T.

4) Exprimer le rapport gyromagnétique $\gamma = \mu / L_z$.

5) On admet que le moment cinétique orbital L_z ne peut prendre pour valeur que des multiples entiers de la constante de Planck réduite $\hbar = 1,05 \cdot 10^{34}$ J·s. Montrer que le moment dipolaire magnétique est quantifié et déterminer l'expression du moment magnétique élémentaire μ_B, appelé magnéton de Bohr.

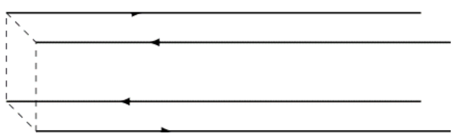
Exercice n°5 • Piège de Ioffe-Pritchard ★★☆

1) Rappeler l'allure des lignes de champ magnétique développées par un fil rectiligne très long.

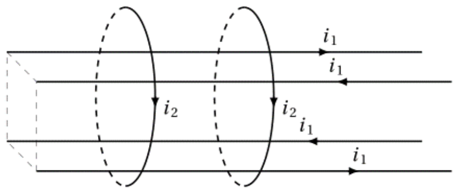
On considère deux barres parallèles à l'axe (Oz), parcourues par des courants de même intensité, mais circulant en sens opposés. Les intersections des barres avec le plan $z = 0$ ont pour coordonnées respectives $(x, y) = (a, 0)$ et $(-a, 0)$.

2) Représenter l'allure des lignes de champ magnétique. Que vaut le champ magnétique sur l'axe (Oz).

On considère à présent (figure de gauche) quatre barres rectilignes toutes parallèles à l'axe (Oz). Les intersections des barres avec le plan $z = 0$ ont pour coordonnées respectives (a, a), $(a, -a)$, $(-a, a)$ et $(-a, -a)$. Elles sont parcourues par des courants d'intensité égale et dont les sens sont alternés.



Barres de Ioffe.



Piège de Ioffe Pritchard.

3) Déterminer l'allure des lignes de champ magnétique dans un plan perpendiculaire aux quatre barres. Indiquer ce que vaut le champ magnétique sur l'axe (Oz).

On ajoute deux bobines (figure de droite) contenues dans des plans orthogonaux aux quatre barres. Ces deux bobines sont parcourues par des courants de même intensité, circulant dans le même sens.

4) Sur l'axe du dispositif, quelle est la direction du champ magnétique ?

5) En comparant avec la situation précédente (absence des deux spires circulaires), le champ magnétique s'annule-t-il sur l'axe ?

6) Dans le contexte du piégeage magnétique d'atomes ultrafroids, on cherche à produire un minimum local de la norme du champ magnétique, ce minimum étant non nul. La distribution de courant proposée vérifie-t-elle ces propriétés ?

Exercice n°6 • Bobines de Helmholtz ★★★

Dans cet exercice, nous nous intéressons à la mesure de la composante horizontale du champ magnétique terrestre, de norme B_H, grâce à un dispositif de type « bobines de Helmholtz » qui peut être réalisé facilement avec du matériel courant.

Une spire de rayon R, d'axe $\overrightarrow{u}_x$ et située en $x = 0$ est parcourue par un courant électrique continu d'intensité I. Elle crée en un point M d'abscisse x de son axe un champ magnétique $\overrightarrow{B}_{spire}(x)$ dont l'amplitude s'exprime par :

$$B_{spire}(x) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2\right)^{-3/2}$$

1) À l'aide d'un schéma, préciser la direction de ce champ magnétique et discuter de son sens. En déduire une expression vectorielle $\overrightarrow{B}_{spire}$ si la spire est orientée positivement par rapport à l'axe de la spire, lui-même orienté par $\overrightarrow{u}_x$.

2) Déterminer alors le champ magnétique $\overrightarrow{B}_{bobines}(x)$ créé en un point M d'abscisse x de l'axe commun à deux bobines d'épaisseur négligeable, comprenant chacune N spires, parcourues par des courants de même sens et de même intensité et situées respectivement en $x = -e/2$ et $x = +e/2$. Faire un schéma représentant le système.

3) Tracer qualitativement l'amplitude $B_{bobines}(x)$ du champ $\overrightarrow{B}_{bobines}(x)$ en fonction de x, en faisant apparaître la contribution de chaque bobine. On distinguera différents cas selon que e est plus grand ou plus petit qu'une valeur critique e_0 (qu'on ne cherchera pas à déterminer). Quel est l'intérêt pratique du cas $e = e_0$?

4) À partir de l'étude de la courbe $B_{spire}(x)$ et de l'observation de ses points d'inflexion, justifier sans aucun calcul que, pour cette valeur particulière e_0 de e, la fonction $B_{bobines}(x)$ puisse être considérée comme constante à l'ordre 3 au voisinage de 0. On ne cherchera pas à calculer e_0, mais uniquement à décrire les variations de $B_{bobines}(x)$ au voisinage de 0 pour $e = e_0$.

On positionne les bobines de façon à ce que $e = e_0 = R$. En $x = 0$, on place une petite boussole constituée d'une aiguille aimantée susceptible de tourner librement autour d'un axe vertical passant par son milieu. La norme du moment magnétique de cette aiguille est notée M et on note J son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation.

L'axe des bobines est aligné avec les lignes de champ de la composante horizontale du champ magnétique terrestre de telle sorte qu'en $x = 0$, l'amplitude B du champ magnétique total s'écrit $B = B_{bobines}(x = 0) + B_H$.

5) Le moment $\overrightarrow{\Gamma}$ du couple subit par un dipôle magnétique de moment $\overrightarrow{M}$ plongé dans un champ magnétique extérieur uniforme $\overrightarrow{B}_{ext}$ est donné par $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{B}_{ext}$. Préciser la position stable de l'aiguille.

6) On appelle T_1 la période des petites oscillations de l'aiguille par rapport à sa position d'équilibre. Montrer que T_1 peut s'exprimer en fonction de J, B et M. On justifiera les différentes hypothèses simplificatrices.

7) On appelle T_2 la période des petites oscillations de l'aiguille lorsque le sens du courant dans les bobines est inversé par rapport à la question précédente. Exprimer B_H en fonction de T_1/T_2. Préciser l'intérêt de la méthode.

Éléments de correction

❶ Cf. correction. ❷ 2) Oui : $\ell \gg R$. 3) $N = \dfrac{B\ell}{\mu_0 I} = 796$ spires. ❸ 1) $\overrightarrow{B}(M) = B(r)\ \overrightarrow{u}_\theta$. 2) $(M, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta)$ et $(M, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\varphi)$ plans de symétrie. 3) $\overrightarrow{B}(M) = B(z)\ \overrightarrow{u}_y$ avec $B(z) = -B(-z)$. ❹ 1) $I = \dfrac{e}{T}$. 2) $\mu = \dfrac{e\pi R^2}{T}$. 3) $L_z = -mR\dfrac{2\pi}{T}$. 4) $\gamma = \dfrac{-e}{2m}$. 5) $\mu_B = \dfrac{\hbar e}{2m} = 9,27 \cdot 10^{-24}$ A·m^2. ❺ 3) Champ nul sur l'axe (Oz). 4) Selon l'axe (Oz).5) Champ non nul sur l'axe. 6) Quatre barres : confinement radial. Deux bobines : confinement axial. ❻ 1) $\overrightarrow{B}_{spire}(x) = \dfrac{\mu_0 I}{2R}\left(1+\left(\dfrac{x}{R}\right)^2\right)^{-3/2}\ \overrightarrow{u}_x$. 2) $\overrightarrow{B}_{bobines}(x) = N \cdot \left[\overrightarrow{B}_{spire}(x-e/2) + \overrightarrow{B}_{spire}(x+e/2)\right]$. 3) En $e = e_0$, le champ est constante autour de $x = 0$. 4) Justifier que pour $e = e_0$, les trois premières dérivées sont nulles. 5) $\theta = 0$ équilibre stable et $\theta = \pi$ équilibre instable. 6) $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{MB_{ext}}}$. 7) $B_H = \dfrac{1+(T_1/T_2)^2}{1-(T_1/T_2)^2}\ B_0$.